SESSION 2002

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'École Nationale Supérieure des Arts et Industries de Strasbourg

Épreuves écrites

MATHÉMATIQUES - EXERCICES

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Note : cette épreuve comprend quatre exercices que l'on pourra traiter dans l'ordre de son choix.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1

Le plan affine euclidien est rapporté au repère d'origine O et de base orthonormée $b = (\vec{i}, \vec{j})$.
Soit a réel, $a > 0$.

On considère la parabole (P) d'équation $y = ax^2$.

Une droite (D) rencontre (P) en deux points A et B. Les tangentes en A et B à (P) se coupent en un point C.

Soit σ une mesure de l'aire comprise entre la droite (D) et la parabole (P) et soit Σ une mesure de l'aire du triangle ABC.

Montrer que le rapport $\frac{\sigma}{\Sigma}$ est égal à $\frac{2}{3}$.

EXERCICE 2

L'objet de cet exercice est de montrer que l'application φ définie par :

$$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et de calculer cette limite.

1° Montrer que :

$$\forall u \in]-\infty,1[\ ,\ 1+u \le e^u \le \frac{1}{1-u}.$$

2° En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \left[0,\sqrt{n}\right],\ \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \le e^{-x^2} \le \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

3° Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

a) Établir la relation : $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, $nA_n = (n-1)A_{n-2}$.
En déduire que la suite (nA_nA_{n-1}), $n \in \mathbf{N}^*$, est constante.
Quelle est la valeur de cette constante ?

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, $A_n \le A_{n-1} \le A_{n-2}$.
En déduire que A_n est équivalent à A_{n-1} quand n tend vers $+\infty$.
Préciser un équivalent de A_n quand n tend vers $+\infty$.

4° Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$ et $C_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$.

a) Montrer que : $B_n \le \varphi(\sqrt{n}) \le C_n$ où φ est l'application précisée en début d'exercice.

b) À l'aide d'un changement de variable, montrer que : $B_n = \sqrt{n} \times A_{2n+1}$.
À l'aide d'un autre changement de variable, montrer que pour $n \ge 2$: $C_n \le \sqrt{n} \times A_{2n-2}$.

c) En déduire la limite de $(\varphi(\sqrt{n}))$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer que l'application φ admet une limite en $+\infty$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Soit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ dont la base canonique est $b = (e_1, e_2, ..., e_n)$ avec $e_1 = (1,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)$.

L'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$ est noté id.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$\forall j \in \{1,2,...n\},\ f(e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} e_k .$$

1° Préciser la matrice A de f dans la base b.

2° Soit (D) la droite vectorielle de vecteur directeur $u_D = e_1 + e_2 + ... + e_n$. Calculer $f(u_D)$.

3° On note g l'endomorphisme défini par $g = f + id$.

i) Préciser l'image de g. En déduire la dimension du noyau (H) de g.

ii) Calculer $f(h)$ pour tout vecteur $h \in (H)$.

4° Montrer que (D) et (H) sont supplémentaires.

5° Soit $(V_1, V_2, ..., V_{n-1})$ une base de (H).

i) Déterminer la matrice de f dans la base $(u_D, V_1, V_2, ..., V_{n-1})$.

ii) Montrer qu'il existe deux réels a_2 et b_2 que l'on déterminera, tels que :

$$f^2 = a_2 f + b_2 id \text{ où } f^2 = f \circ f .$$

De même, montrer que, pour tout entier p, $p \geq 2$, il existe deux réels a_p et b_p que l'on déterminera en fonction de p et de n, tels que :

$$f^p = a_p f + b_p id \text{ où } f^p = f \circ f^{p-1} .$$

EXERCICE 4

Soit a réel, $a > 0$.
On considère un carré $ABCD$ dont la longueur des côtés est a.
On note (P) le plan du carré.
Sur une demi-droite (Ax) perpendiculaire en A au plan (P) on considère un point M et l'on note d la distance de A à M.

1° La perpendiculaire en M au plan du triangle MBC rencontre le plan (P) en un point R.
La perpendiculaire en M au plan du triangle MCD rencontre le plan (P) en un point S.

i) Faire une figure.

ii) Montrer que R appartient à la droite (AB).

De même, on admet que S appartient à la droite (AD).

2° Montrer que les longueurs AR et AS sont égales.
Quelle est la nature du triangle ARS ?

3° Quel est le lieu géométrique décrit par le milieu K du segment $[RS]$ lorsque le point M décrit la demi-droite (Ax) ?

4° Démontrer que la droite (MC) est perpendiculaire au plan (MRS).

5° La hauteur issue de A du triangle MAK rencontre le côté $[MK]$ en H.
Montrer que (AH) est la hauteur issue de A du tétraèdre $ARMS$ et que H est l'orthocentre du triangle MRS.